مبرهنة :

اذا كانت E مجموعة ما تحت العمليتين الثنائيتين ∨ , ∧ بحيث تحقق الشروط من (1 - 4) (أي اللانمو والتبديل ----) عندئذ توجد علاقة ترتيب جزئية وحيدة ≤ على المجموعة E بحيث تكون $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة .

- تعريف الشبكات الجزئية :

لتكن $(E, \leq, \wedge, \vee)$ شبكة ما ولتكن $S \subseteq E$ عندئذ نقول عن S انها شبكة جزئية من E اذا حققت عناصرها جميع شروط الشبكة

- ينتج من التعريف :

اذا كانت $S \subseteq (E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة جزئية من E اذا وفقط اذا

$$\forall x, y \in S \ ; \ x \vee y \in S \ \& \ x \wedge y \in S$$

مثال :

ان مجموعة الاعداد الطبيعية شبكة جزئية من مجموعة الاعداد الصحيحة

$$(\mathbb{N}, \leq, \vee, \wedge) \subseteq (\mathbb{Z}, \leq, \vee, \wedge) \subseteq (\mathbb{Q}, \leq, \vee, \wedge) \subseteq (\mathbb{R}, \leq, \vee, \wedge)$$

تحت علاقة الترتيب الطبيعي في هذه الحالة يكون

$$\sup = \max \quad , \quad \inf = \min$$

مثال :

شبكة الأعداد الطبيعية المرتبة جزئياً بعلاقة القسمة

$$(\mathbb{N}, \leq, \vee, \wedge)$$

$$a \vee b = l.c.m(a,b)$$

$$a \wedge b = g.c.d(a,b)$$

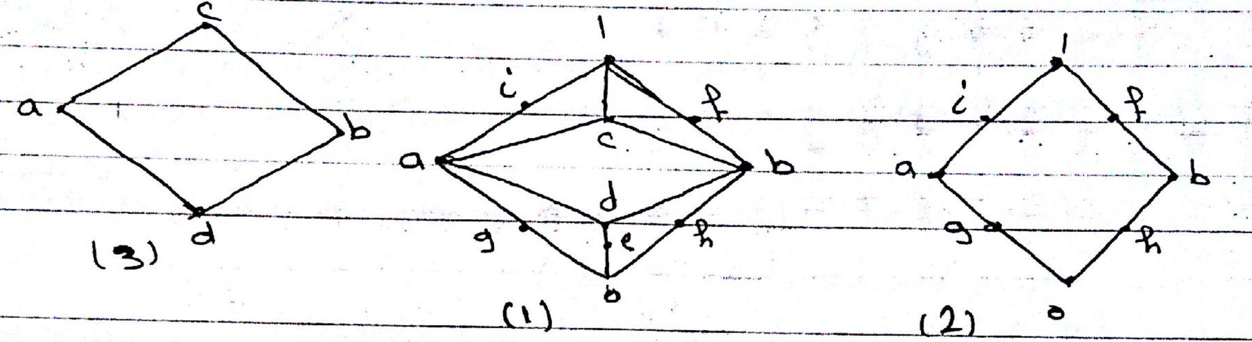
ومجموعات قواسم الأعداد كلها شبكات جزئية من هذه الشبكات مثل D(6) وبشكل عام كل الشبكات

$D(n) \ ; n \in \mathbb{N}$ هي شبكات جزئية مثل D(12) , D(6) , D(2)

ملاحظة :

يمكن لبعض المجموعات الجزئية ($\leq$, S) من الشبكة ($E, \leq, \vee, \wedge$) تحت علاقة الترتيب $\leq$ أن تكون شبكة دون أن تكون شبكة جزئية منها ويحصل ذلك عندما تتباين الحد الأعلى الأصغر والحد الأدنى الأعظم كما في المثال التالي :

مثال : لتكن لدينا الشبكة الممثلة بالمخطط التالي .



(2) لا تشكل شبكة جزئية من (1) ولكن هي شبكة بحد ذاتها .

$a \vee b = c$

ولكن c غير موجود في الشبكة (2) .

(3) - شبكة جزئية من الشبكة (1)

- الجداء المباشر للشبكات :

تعريف :

اذا كانت $(E_1, \leq)$ و $(E_2, \leq)$ مجموعات مرتبة جزئياً عندئذ نسمي مجموعة جميع الأزواج المرتبة (x, y) والتي مساقطها الأولى من E_1 ومساقطها الثانية من E_2 والتي تحقق الشرط :

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \;\&\; y_1 \leq y_2$$

وهي الجداء المباشر للمجموعات المرتبة جزئياً ونرمز له بالرمز $E_1 \times E_2$

- مبرهنة مهمة :

إن الجداء المباشر لأي شبكتين هو شبكة حيث :

$$1)\text{-}\ (a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \iff a_1 \leq a_2 \;\&\; b_1 \leq b_2$$

2)- $(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2 , b_1 \vee b_2)$

3)- $(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = (a_1 \wedge a_2 , b_1 \wedge b_2) \; ; \forall a_1, a_2 \in E_1 , \forall b_1, b_2 \in E_2$

وجدنا سابقاً (حسب تعريف سابق) أن $(E_1 \times E_2 , \leq)$

مجموعة مرتبة جزئياً سوف نثبت أنه لأي عنصر

$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in E_1 \times E_2$

أن:

$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2 , b_1 \vee b_2)$ ....(1)

$(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = (a_1 \wedge a_2 , b_1 \wedge b_2)$ ....(2)

سوف نثبت (1)

لنضع

$(d_1, d_2) = (a_1, b_1) \vee (a_2, b_2)$

عندها يكون: $(a_1, b_1) \leq (d_1, d_2) \; \& \; (a_2, b_2) \leq (d_1, d_2)$

$\Rightarrow \quad a_1 \leq d_1 \; \& \; a_2 \leq d_1 \quad , \quad b_1 \leq d_2 \; \& \; b_2 \leq d_2$

هذا يعني أن d_1 هو حد أعلى الأصغر للعنصرين a_1, a_2

و d_2 هو حد الأعلى الأصغر للعنصرين b_1, b_2

$\Rightarrow \quad a_1 \vee a_2 \leq d_1 \quad \& \quad b_1 \vee b_2 \leq d_2 \Rightarrow$

$(a_1 \vee a_2 , b_1 \vee b_2) \leq (d_1, d_2)$ .... (أ)

كما أن:

$a_1 \leq a_1 \vee a_2 \quad , \quad b_1 \leq b_1 \vee b_2 \quad , \quad a_2 \leq a_1 \vee a_2 \quad , \quad b_2 \leq b_1 \vee b_2$

$\Rightarrow \quad (a_1, b_1) \leq (a_1 \vee a_2 , b_1 \vee b_2)$

$(a_2, b_2) \leq (a_1 \vee a_2 , b_1 \vee b_2)$

وبالتالي ينتج أن:

$(d_1, d_2) = (a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) \leq (a_1 \vee a_2 , b_1 \vee b_2)$ ---- (ب)

ومنه من (أ) و(ب) تنتج المساواة (1)

$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2 , b_1 \vee b_2)$

محاضرات الدفتر

القسم : السنة : المادة : المحاضرة :

وبذلك نكون قد برهنا أن الجداء المباشر لأي شبكتين هو شبكة.

مثال:

لتكن لدينا المجموعات التالية

$U = \{a_1, a_2\}$

$P = \{\phi, \{a_1\}\}$

$Q = \{\phi, \{a_1\}\}$

المطلوب:

بين أن كل من $(P, \leq, \vee, \wedge)$, $(Q, \leq, \vee, \wedge)$ شبكات ثم اوجد الشبكة $P \times Q$ والشبكة $P \times P \times P$ ثم ارسم مخطط هاس لهما.

الحل:

$P \times Q = \{(\phi, \phi), (\phi, \{a_2\}), (\{a_1\}, \phi), (\{a_1\}, \{a_2\})\}$

$(\{a_1\}, \{a_2\})$

$(\phi, \{a_2\})$ $(\{a_1\}, \phi)$

(ϕ, ϕ)

$P \times P \times P = \{(\phi, \phi, \phi), (\phi, \phi, \{a_1\}), (\phi, \{a_1\}, \phi), (\{a_1\}, \phi, \phi),$

$(\phi, \{a_1\}, \{a_1\}), (\{a_1\}, \phi, \{a_1\}), (\{a_1\}, \{a_1\}, \phi),$

$(\{a_1\}, \{a_1\}, \{a_1\})\}$

$(\{a_1\}, \{a_1\}, \{a_1\})$

(ϕ, ϕ, ϕ)

مبرهنة :

في أية شبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ يتحقق ما يلي :

1- $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2- $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

الاثبات :

$x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$ و $x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$

$\Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ ...(1)

(2) $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y$ و $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z$

و $x \vee (y \wedge z)$ هو أدنى العنصرين .

$\Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\forall x, y, z \in E$

ملاحظة :

إن المساواة في (1) و(2) ليست صحيحة في الحالة وهذا المثال التالي يوضح ذلك :

مثال : لتكن لدينا الشبكة الممثلة بمخطط هاس التالي

$d \wedge (b \vee c) = d \wedge e = d$

$\neq$

$(d \wedge b) \vee (d \wedge c) = b \vee a = b$

من أنواع الشبكات :

من هذه الأنواع المعروفة :

1- الشبكة التوزيعية :

نقول عن الشبكة انها توزيعية اذا تحققت عناصرها أحد الشرطين التاليين .

1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; $\forall x, y, z \in E$

لنبرهن صحة القضية لأن الشرطين متكافئين .

(1) ⇐ (2)

لنأخذ الطرف الأيسر من المساواة (2)

$$x \vee (y \wedge z) = [x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z)$$
$$= x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)]$$

وحسب (1) فرضاً

$$= x \vee [(x \vee y) \wedge z]$$
$$= (x \wedge (x \vee y)) \vee [z \wedge (x \vee y)]$$

حسب (1) فرضاً

$$= (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

من (2) ⇐ (1) يتم بنفس الطريقة تماماً.

- أمثلة على الشبكات التوزيعية :

1 - إذا كانت: $X = \{a, b, c\}$

هل $(P(X), \leq, \vee, \wedge)$ شبكة توزيعية ؟

هي شبكة توزيعية

2 - مجموعة الأعداد الطبيعية المرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة القسمة أي $(N, \leq, \vee, \wedge)$ هي شبكة توزيعية .

ملاحظات :

1- ان كل شبكة جزئية من شبكة توزيعية هي شبكة توزيعية .

2- إن كل شبكة تحت علاقة ترتيب كلي هي شبكة توزيعية .

- نتيجة : من التعريف السابق نجد أن الشبكة تكون توزيعية إذا حققت عناصرها احدى المتراجحتين الآتيتين :

$$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

- تعريف : الشبكة الموودولية :

لتكن $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة نقول عن هذه الشبكة أنها موودولية

إذا كان $x \leq z$ فإن :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

نتيجة :

إن كل شبكة توزيعية هي شبكة موودولية وذلك لأن :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

مثال: لتكن لدينا الشبكة الممثلة بمخطط هاسه هل هي شبكة مودولية

الاثبات: ليست شبكة مودولية لأن

لدينا a

$$b \leq a$$

$$b \vee (c \wedge d) = b \vee a = b$$

$$\neq$$

$$(b \vee c) \wedge d = e \wedge d = d$$

ملاحظات

1- ان كل شبكة جزئية من شبكة مودولية هي ايضاً مودولية.

2- وجدنا أن كل شبكة توزيعية هي شبكة مودولية ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة اذ انه توجد شبكات مودولية ولكنها ليست توزيعية.

مثال:

ليست توزيعية ولكنها مودولية.

انتهت المحاضرة